# CÁLCULO (GRUPO 3M)
## 11/5/2015

1. (1,5 puntos) Calcule, si existen, los siguientes límites relativos a subconjuntos:

$$(a)\quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\operatorname{sen}^2 x}} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y}$$

¿Qué se puede decir del límite doble $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y}$?

2. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} - x + 2y & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

se pide:

(a) (1,6 puntos) Calcular las derivadas parciales de $f$ en $(0,0)$.

(b) (2,4 puntos) Estudiar la diferenciabilidad de $f$ en $\mathbb{R}^2$.

3. (1,5 puntos) Dada la función $f(x,y) = y^4 - x^4 + 2x^2y + 6x$, determine el plano tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(1, 0, f(1,0))$.

Si $f$ modeliza la temperatura de una placa metálica, desde el punto $(1,0)$

(a) (1 punto) ¿en qué dirección es máxima la variación de la temperatura y cuál es la razón de dicha variación?

(b) (1 punto) ¿en qué dirección la temperatura no varía?

(c) (1 punto) ¿la temperatura aumenta o disminuye, y con qué razón, según la dirección y sentido dados por el vector $(-1,0)$?

## SOLUCIÓN

1. (a) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1} = 2\operatorname{sen} 0 \cdot \cos 0 = 0$

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\operatorname{sen}^2 x}} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$

Podemos decir que $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y}$ pues los límites de $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{y}$ relativos a los subconjuntos $\{(x,y)\in \operatorname{Dom}(f) : x=y\}$ y $\{(x,y)\in \operatorname{Dom}(f) : y=\operatorname{sen}^2 x\}$ no coinciden.

2.- $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}-x+2y & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{x^2}-x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)=-1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{0}{y^2}+2y}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}2=2$$

(b) Estudio de la diferenciabilidad de $f$ en $\mathbb{R}^2$.

- Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\Rightarrow f(x,y)=\frac{x^4}{x^2+y^2}-x+2y$ es una función diferenciable en $(x,y)$ por ser suma de una función racional, cuyo denominador no se anula en $(x,y)$, y otra polinómica.

- Si $(x,y)=(0,0)$, $f$ será diferenciable si el siguiente límite es 0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\left(f(0,0)+Jf(0,0)\cdot\begin{pmatrix}x-0\\y-0\end{pmatrix}\right)}{\|(x,y)-(0,0)\|}=$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^4}{x^2+y^2}-x+2y-(0-x+2y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Estudiamos este límite pasando a coordenadas polares $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\,\text{sen}\,\theta\end{cases}$

Llamando $\tilde f(x,y)=\frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ se tiene:

$$\tilde f(\rho\cos\theta,\rho\,\text{sen}\,\theta)=\frac{\rho^4\cos^4\theta}{(\rho^2)^{3/2}}=\underbrace{\rho}_{\varphi(\rho)}\underbrace{\cos^4\theta}_{\psi(\theta)}$$

Dado que $\left.\begin{array}{l}\lim_{\rho\to 0}\varphi(\rho)=0\\ \psi(\theta)\text{ es acotada}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tilde f(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos^4\theta=0.$

Por tanto, $f$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

3. $f(x,y) = y^4 - x^4 + 2x^2y + 6x$

Dado que $f$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, pues es una función polinómica, en particular, en el punto $(1,0)$. Por tanto, existe plano tangente a $G(f)$ en $(1,0,f(1,0)) = (1,0,5)$ y viene dado por la ecuación

$$z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4x^3 + 4xy + 6 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -4+6 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 2x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2$$

entonces la ecuación queda:

$$z = 5 + 2(x-1) + 2y \iff \boxed{2x+2y-z+3=0}$$

(a) La derivada direccional es máxima según la dirección y sentido del vector

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right) = (2,2),$$

y la razón de variación es

$$f'\left((1,0); \frac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|}\right) = \|\nabla f(1,0)\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

(b) La temperatura no varía en la dirección perpendicular a $\nabla f(1,0)$ es decir, según $(u,v)$ tal que

$$\nabla f(1,0)\cdot(u,v) = 0 \iff (2,2)\cdot(u,v) = 0 \iff \boxed{u+v=0}$$

(c) Dado que $f'((1,0);(-1,0)) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ dif. en } (1,0)}}{=} \nabla f(1,0)\cdot(-1,0) = (2,2)\cdot(-1,0) = -2 < 0$

entonces la temperatura disminuye, a razón de 2 unidades de temperatura por unidad de longitud, en el pto. $(1,0)$ según el vector $(-1,0)$.